Luc de Brabandere
Christophe Ribesse

Petite Philosophie des mathématiques vagabondes

ISBN : 978-2-212-55240-9

EYROLLES

SOMMAIRE

Avant-propos...9

CQFD...21

1. Nombre d'or 35

2. Pi 39

3. Nombre imaginaire...43

4. Infini...47

5. Preuve...51

6. Polyèdre..59

7. Tangente 63

8. Projection 67

9. Binôme 71

10. Progression géométrique 75

11. Trochoïde 81
12. Aléatoire 85
13. Topologie 87
14. Information 91
15. Dilemme 95
16. Binaire 99
17. Fractal 105
18. Attracteur 109
19. Chaos 113
20. Arrondi 117
21. Tiers exclu 121
22. Induction 125
23. Point de vue 129
24. Analogie 135
25. Conjecture 139
CQFM 143
Bibliographie 147

AVANT-PROPOS

Des « mathématiques vagabondes » ? Aurais-je succombé moi aussi à la mode des oxymorons, au plaisir espiègle de faire cohabiter des mots logiquement incompatibles ? Parlera-t-on ici également d'équation dilettante et de démonstration approximative ? La réponse est oui. Mais ma motivation n'est ni le jeu du langage, ni la provocation facile, et encore moins la volonté de dénigrer la discipline dans laquelle j'ai grandi, bien au contraire. La philosophie s'accommode fort bien de l'oxymoron. N'est-elle pas souvent définie comme une « pratique théorique » ? Pour Auguste Comte, un philosophe se doit même d'être un « spécialiste des généralités »…

Il faut parler autrement des mathématiques car les machines changent les données du problème. Dans son numéro de décembre 2010, l'excellent magazine *Sciences Humaines* a interviewé le mathématicien Cédric Villani qui a obtenu la médaille Fields, considérée comme l'équivalent du prix Nobel dans sa discipline : « Une formule représente une sorte de bataille, dit-il, à laquelle se livrent les éléments de l'équation […]. Il ne faut pas y penser en termes de chiffres, mais de concepts qui peuvent liguer leurs forces ou perdre de leur puissance. » Et il ajoute : « On croit souvent que la clé des mathématiques réside dans la démonstration. En fait, celle-ci survient comme une étape ultérieure après l'intuition initiale qui consiste à voir un chemin nouveau. » Cédric Villani nous suggère de prendre du recul, il nous encourage à essayer des approches originales. C'est ce que j'ai voulu faire ici.

Les mathématiques ne sont pas mon métier. Je ne suis ni chercheur, ni enseignant, ni actuaire, ni concepteur de logiciel. Non, j'anime des séminaires de réflexion stratégique pour des responsables d'entreprise et j'enseigne la philosophie à la Louvain School of Management.

Les mathématiques ne sont pas mon métier mais j'aime les mathématiques. Depuis toujours, j'ai aimé jouer avec les nombres et les figures géométriques, et grâce à une génération entière de bons professeurs, petit à petit, le goût m'est venu de chercher ce qui se cachait derrière les équations et les théorèmes. Pour le plaisir.

Mais de toute évidence, ce plaisir n'était pas partagé par tout le monde. Si une partie d'entre nous s'amusait vraiment à trouver le point d'inflexion d'une fonction du troisième degré, pour d'autres par contre, rien n'était plus ennuyeux qu'un cosinus ou une décomposition en facteurs. Mais pourquoi donc ne pouvaient-ils pas eux aussi s'amuser avec les mathématiques ?

Une deuxième série de questions plus fondamentales restait également sans réponse : à quoi servent finalement toutes ces belles constructions de l'esprit ? Quel est le sens caché derrière ces milliers de chiffres et de symboles ? Quelle est la vraie nature d'un théorème ?

Une spécialisation en mathématiques appliquées lors de mes études d'ingénieur civil à l'Université Catholique de Louvain m'a apporté un début de réponse en présentant la richesse potentielle de la modélisation des systèmes.

Vingt années de pratique de l'informatique m'ont ensuite laissé entrevoir à quel point les mathématiques devenaient différentes de ce qu'elles avaient été. Un jour, il ne sera même plus vraiment nécessaire de savoir calculer. Que seront alors les mathématiques ?

L'étude de la philosophie m'a dans un troisième temps convaincu que le futur serait aux mains de ceux qui allieront la puissance des machines disponibles à l'imagination de tous ceux qui n'en ont jamais eu. Une réflexion s'impose car il n'y a pas de progrès évident. Les enfants ont aujourd'hui une calculatrice en poche (qui leur sert d'ailleurs surtout de téléphone), mais bien souvent, ils ne savent plus calculer le reste d'une division ! Une machine en plus, une information en moins.

Toutes ces questions, du plaisir, du sens et de l'enseignement des mathématiques, doivent être posées avec d'autant plus d'insistance que chaque jour, les ordinateurs et Internet sont un peu plus envahissants.

L'histoire des mathématiques fait partie d'un patrimoine culturel collectif et à ce titre mérite déjà toute notre attention. Mais en plus, elle contient un double message d'efficacité pédagogique et de créativité incessante, une double leçon plus que jamais d'actualité. Pour reprendre quelques mots de son propre vocabulaire, l'histoire des mathématiques contient des « invariants », des « constantes », des « paraboles » à méditer, quelle que soit la vitesse à laquelle le monde donne l'impression de « dériver ».

J'ai donc voulu écrire un petit livre impertinent, bien dans la ligne des trois premiers de cette collection publiée chez Eyrolles.

Pour ceux qui n'ont pas eu la chance de découvrir la richesse des mathématiques, pour ceux qui n'ont plus le temps d'en retrouver les saveurs, pour ceux qui ont toujours cru qu'elles étaient un privilège réservé aux autres, et aussi pour ceux qui ont la responsabilité d'en assurer l'enseignement. Mon souhait est qu'ils sentent un petit déclic, qu'ils trouvent ici l'une ou l'autre idée, de quoi combler un petit peu le fossé artificiel qui sépare aujourd'hui ceux qui aiment les mathématiques de ceux qui ne savent pas qu'ils les aiment.

Ce livre n'est pas un livre de mathématiques. Ce n'est pas non plus un livre de jeux, ni un livre de science, ni un livre d'exercices. C'est avant tout un livre de concepts que j'ai voulu rendre plus clairs. Les sujets choisis ont été picorés dans un ensemble infini de possibilités. Pas vraiment au hasard, certes. J'ai essayé d'éviter les redondances et de donner un aperçu le plus large possible de la beauté des mathématiques, tout en réveillant ce que je sais être, chez beaucoup, de vagues et même parfois de bons souvenirs.

Les thèmes retenus ne sont pas vraiment traités. Ils sont simplement esquissés, incomplets. Ils utilisent parfois des formules non démontrées et supposent la bonne volonté évidente du lecteur. Ce ne sont pas des fables mathématiques parce qu'il n'y a derrière ni morale ni message. Ce ne sont pas plus des contes mathématiques, même si, d'une certaine manière, ils ont pour but de faire rêver. Après tout, n'a-t-on pas souvent conseillé aux enfants, pour s'endormir, de compter les moutons ?

Les pages qui suivent comprennent peu de calculs, elles sont d'ailleurs destinées à ceux et celles qui comprennent peu les calculs. Convaincu qu'une étude trop poussée de la grammaire peut parfois cacher la beauté de la littérature, j'ai volontairement privilégié la figure et le dessin. J'ai pris des libertés par rapport aux équations pour encourager un autre regard sur les mathématiques, celui que permet déjà une simple connaissance des quatre opérations arithmétiques fondamentales, celui qui autorise parfois de mettre un signe « = » entre deux parties qui ne le sont pas tout à fait.

L'important est de pouvoir prendre du recul. Je l'ai compris le jour où, à dix-huit ans, j'ai passé l'examen d'entrée à l'université. Un professeur m'a posé la question suivante : « Pourquoi, dans les cours de physique que vous avez suivis, y a-t-il des notions d'optique et pas d'acoustique ? » Je m'attendais à tout sauf à cela. Il a enfoncé un peu plus le clou : « L'œil est-il vraiment plus important que l'oreille ? » J'étais déstabilisé. Je pouvais répondre à beaucoup de questions à propos de l'optique mais pas à la question : « Pourquoi l'optique ? » Il me donna alors la clé : « Parce que les équations sont simples, parce que les mathématiques qui sous-tendent l'optique sont très accessibles. Ce qui n'est pas le cas de l'acoustique… »

Il faut pouvoir prendre du recul. C'est pourquoi j'ai supprimé les démonstrations arides et les ai remplacées par le symbole de l'as de pique : (♠). Ce signe indique que la logique exigerait à cet endroit un long développement mathématique, mais celui-ci serait contraire au double objectif poursuivi ici. N'y a-t-il pas du plaisir et du sens à remplacer vingt équations par un as de pique ?

Pour chaque sujet, j'ai délibérément choisi le cas le plus simple. Chaque fois que possible, j'ai pris un angle droit plutôt qu'un angle quelconque, une division qui tombe juste plutôt qu'une fraction encombrante, un cube plutôt qu'un solide irrégulier, le cas particulier plutôt qu'une généralisation qui se fait parfois au détriment de l'efficacité pédagogique. Le simple est souvent un bon chemin pour aller vers le plus compliqué.

Mon père était docteur en droit. Sa vision des mathématiques, différente, était une raison supplémentaire de lui parler. Son problème favori était le suivant : si trois poules pondent trois œufs en trois jours, combien de temps faut-il à une poule pour pondre un œuf ? Bien qu'enfantin, ce petit piège en forme de plaisir d'apprendre contenait déjà un message : les mathématiques ne peuvent être réduites au calcul, et le calcul ne peut être réduit aux chiffres. La règle de trois est le plus élémentaire des modèles mathématiques. Mais la leçon est claire. Si ce qui est compliqué doit être simplifié, ce qui est complexe demande à être modélisé. Et la poule mettra trois jours pour pondre un œuf.

Il faut percevoir ce petit essai comme un puzzle dont certaines pièces sont délibérément manquantes. Mais leur absence n'empêche pas les autres de tenir ensemble et de laisser deviner la totalité du sujet. Chaque page indique ainsi une direction possible de la recherche personnelle, qui peut se faire éventuellement en achetant un livre, ou même en retrouvant un ancien cours au fond d'une boîte en carton. Chaque thème est une invitation au voyage dans la littérature qui lui est consacrée. Chaque sujet suggère d'en choisir d'autres.

Comment classer tous ces concepts ? Là aussi j'ai pris une option simple.

Nous commencerons par quatre nombres célèbres : le nombre d'or, π, la racine carrée de -1 et l'infini (chapitres 1 à 4).

Platon avait fait graver sur le fronton de son académie : « Nul n'entre ici s'il n'est géomètre. » C'est le concept de mesure qui prendra le relais (chapitres 5 à 8). Nous évoquerons le choc ressenti par les premiers mathématiciens grecs qui réalisèrent que certaines longueurs ne pouvaient être mesurées par un nombre rationnel.

Après l'arithmétique et la géométrie, c'est l'algèbre qui fera l'objet d'un troisième moment (chapitres 9 à 11). L'invention quasi simultanée par Newton et

Leibniz du calcul différentiel a permis de mathématiser le mouvement.

Les mathématiques vont ensuite envahir l'ensemble des structures. Nous prendrons les exemples de Pascal, Euler, Shannon et von Neumann qui se sont attaqués respectivement aux structures du hasard, des réseaux, de la communication et des jeux (chapitres 12 à 15).

Un jour vint l'ordinateur, l'outil par excellence de la modélisation. Le cinquième temps approchera les concepts d'attracteur, de fractal ou encore de chaos, autant de domaines inaccessibles sans l'informatique (chapitres 16 à 20).

Nous terminerons par ce qui aurait pu être le commencement : le rôle de la créativité. Alain Connes, autre médaillé Fields, le dit bien : « Si le problème résiste, il faut s'en détourner, penser à autre chose et laisser venir des analogies évocatrices qui permettront d'aborder le problème par la bande. » Pas de logique sans analogique donc ! Mais il faudra quand même faire passer les modèles imaginés par la dure sanction de la preuve… Galilée dit un jour que le grand livre de la Nature est écrit en langage mathématique. Et finalement, s'il avait raison ? Reste une question non résolue à ce jour : ce fameux livre, est-ce un roman ou un essai ?

Mon souhait serait de voir le lecteur trouver, grâce à ce petit livre, le plaisir que j'ai eu à l'écrire. Il est pour cette raison spécialement aéré et ne peut se lire qu'avec un crayon en main. J'aurai atteint mon objectif si, après la lecture de ces pages, le moindre espace libre se trouve rempli d'annotations personnelles, si des calculs manuscrits se sont glissés entre les équations proposées, si des figures ont été complétées ou modifiées, si une trace subsiste de l'une ou l'autre réaction suscitée, si des griffonnages témoignent par-ci par-là de l'envie d'en savoir plus.

Je souhaiterais retrouver dans ce livre l'empreinte de celui qui l'a lu. Un peu comme si on l'avait écrit ensemble.

Hoves, septembre 2011

1. NOMBRE D'OR

Bertrand Russell (1872-1970) a dit que les mathématiques sont nées le jour où l'on s'est rendu compte qu'il y avait quelque chose de commun entre un couple de faisans et une paire de claques. Au-delà de la boutade, le philosophe anglais affirme là quelque chose de fondamental. La naissance du « nombre » est le premier moment des mathématiques.

L'idée de nombre certes, mais pas encore sa définition. Il faudra attendre plusieurs millénaires pour recevoir de Gottlob Frege (1848-1925) une définition rigoureuse ! Les mathématiques appliquées sont nées avant les mathématiques pures, ainsi va le monde. Les vignerons de Babylone faisaient bien du vin, sans imaginer qu'un jour on établirait les équations chimiques de la fermentation.

Il y a un nombre infini de nombres, d'autant plus que l'infini est un nombre ! Mais certains sont entrés au panthéon de l'arithmétique. C'est le cas du nombre d'or, par lequel nous commencerons.

Les rectangles ne sont pas tous semblables. Certains sont longs et étroits, d'autres se rapprochent plutôt du carré. D'autres encore se situent entre ces deux extrêmes et sont d'une certaine manière plus agréables à l'œil. Certains rectangles sont effectivement plus harmonieux que d'autres, plus esthétiques, en un mot mieux proportionnés. Mais de quelle proportion s'agit-il… au juste ?

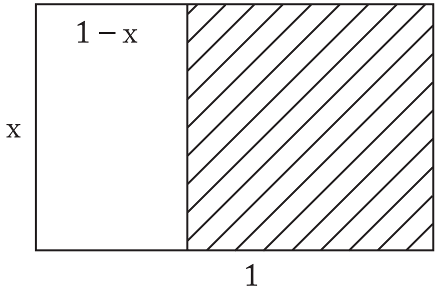
Il ne peut évidemment s'agir que du rapport entre la longueur et la largeur, entre les deux côtés du rectangle. Y aurait-il alors une proportion parfaite qui conférerait au rectangle l'harmonie absolue ?

Dans l'Antiquité, les Grecs avaient déjà étudié la question et établi ainsi un des premiers critères de la beauté géométrique : un rectangle est harmonieux s'il garde les mêmes proportions lorsqu'on lui enlève un carré. Dans ce cas, le rapport parfait entre la longueur et la largeur est baptisé « nombre d'or » et sa valeur est de 1,618… (♠)

Le rapport inverse découle de sa propriété esthétique. Il s'obtient en lui retirant une unité, à quelques poussières de chiffre près en effet.

$$\frac{1}{1{,}618} = 0{,}618 \ (\spadesuit)$$

Ce nombre d'or a des propriétés multiples mais l'une d'elles est plutôt gênante : c'est un nombre difficile à retenir. Voici un petit moyen mnémotechnique issu directement de la définition :



la longueur du grand rectangle d'or est 1 et sa largeur x, le nombre d'or vaut donc 1/x. Si l'on enlève un carré, la longueur du petit rectangle d'or est x et sa largeur (1 − x), le nombre d'or vaut donc aussi par définition la longueur du petit rectangle divisé par sa largeur, soit $\frac{x}{1-x}$.

Les deux valeurs sont bien sûr égales :

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

Donc $1 - x = x^2$

$1 = x^2 + x = x(x+1)$

et $x = \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\ldots}}}$

Cette expression mathématique est appelée « fraction continue » car on peut remplacer x par $\dfrac{1}{1+x}$ jusqu'à l'infini.

Plus on s'enfonce dans les dénominateurs, plus on se rapproche de la valeur du nombre d'or :

$$1 + \frac{1}{1+1} = 1{,}5$$

$$1 + \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}} = 1 + \frac{1}{\dfrac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = 1{,}666$$

etc.