

Salah Khalfallah

Méthodes d'analyse des structures hyperstatiques



*A la mémoire de mon père ; **Tahar***

*A la mémoire de ma femme ; Mme **KHALFALLAH - BOUDAA***
Nadjet

EXTRAIT

Préface

L'ouvrage présenté a été initialement rédigé sous la forme de notes de cours à l'usage des étudiants de grade Licence en génie civil de l'université de Jijel. Ce tome est consacré à l'analyse des structures hyperstatiques tandis que le second tome traite l'analyse des structures isostatiques. Le présent ouvrage expose en principe les différentes méthodes d'analyse des structures hyperstatiques. L'objectif premier est de satisfaire le besoin des étudiants de la scène mécanique à acquérir et d'appliquer les méthodes d'analyse des structures hyperstatiques.

Cet ouvrage contient les méthodes d'analyse des structures hyperstatiques. Chaque chapitre est initié par l'illustration des objectifs à atteindre lors de l'enseignement du chapitre envisagé. La seconde partie de chaque chapitre présente la formulation théorique de la méthode étudiée. La troisième partie décrit plusieurs exemples numériques contenant de multiples difficultés fréquentées au cours d'analyser les structures hyperstatiques. Un résumé est présenté à la fin de chaque chapitre. Enfin, une série d'exercices est présentée contenant une variété d'exemples numériques pour approfondir et acquérir les informations nécessaires d'analyse des structures hyperstatiques.

L'ouvrage est divisé, après un chapitre d'introduction générale à l'analyse des structures hyperstatiques, en neuf chapitres présentant cinq différentes méthodes d'analyse des structures hyperstatiques, telles que : la méthode des trois moments, la méthode des forces, la méthode des rotations, la méthode de distribution des moments et la méthode matricielle de rigidité. Le dernier chapitre est subdivisé en trois chapitres distincts à savoir l'application de la méthode matricielle de rigidité à

l'analyse (1) des structures réticulées, (2) des structures poutres et (3) des structures portiques. Cette dernière partie explique la base principale de mise en œuvre de l'analyse automatique des structures hyperstatiques.

Le chapitre premier est consacré à la présentation d'une introduction générale des structures hyperstatiques. Le deuxième chapitre présente l'étude des poutres hyperstatiques à une seule travée et continues par la méthode des trois moments (la méthode de Clapeyron) et la méthode des foyers. Dans le troisième chapitre, la méthode des forces est décrite indifféremment à l'analyse des poutres, des portiques et des structures réticulées. Le quatrième chapitre présente la méthode des rotations à l'analyse des éléments fléchis, tels que les poutres et les portiques. La méthode de distribution des moments ou la méthode de Cross est illustré dans le cinquième chapitre. Une introduction générale aux méthodes matricielles est décrite par le chapitre six. Parmi, la méthode matricielle de rigidité est largement exposé au long du chapitre septième à l'analyse des structures réticulées, à l'analyse des poutres dans le huitième chapitre et enfin les structures portiques au neuvième chapitre.

Enfin, nous espérons que notre démarche à travers la publication de cet ouvrage répondra aux besoins des étudiants qui s'intéressent à cette matière scientifique ou technique. Néanmoins, nous sommes très conscients que le travail présenté n'est pas exempté d'erreurs. Pour cette raison, nous accueillerons avec gratitude toutes les corrections et les remarques en vue d'améliorer cet ouvrage dans les prochaines éditions. Les remarques ou les suggestions peuvent être adressées via les adresses électroniques suivantes : www.freewebs.com/khalfallah/index.htm

S. Khalfallah

Chapitre I

Introduction à l'analyse des structures hyperstatiques

Les objectifs à atteindre lors de l'enseignement de ce chapitre sont :

- Le rôle d'enseignement de l'analyse des structures.
- La notion et la définition d'une structure.
- Le développement des méthodes d'analyse des structures.
- La distinction entre les différentes catégories de structures.
- Les charges et leurs natures.
- Le degré d'hyperstaticité d'une structure.

Ce chapitre descriptif montre une présentation générale des aspects préliminaires d'analyse des structures. Au premier lieu et après une introduction générale, nous avons présenté la définition d'une structure, les objectifs à atteindre lors de l'enseignement de l'analyse des structures et un historique de son développement. Dans la seconde partie, nous avons exposé une classification des structures et les différentes charges y pouvant être appliquées. La dernière partie de ce chapitre montre le calcul du degré d'hyperstaticité d'une structure.

1.1 Introduction

Le rôle primordial de l'étude d'analyse des structures vise à déterminer les actions internes et les réactions d'appui d'une structure sollicitée par un système de charges externes ou soumise à des déformations imposées et ou subisse à une dénivellation d'appui. Une action interne peut désigner

indifféremment une force et ou un moment de flexion. De la même manière, une déformation peut désigner une translation et ou une rotation.

Les structures sont en général classées en deux grandes catégories : (1) les structures isostatiques et (2) les structures hyperstatiques. Les structures isostatiques sont celles où les trois équations de la statique sont suffisantes à leur analyse. Dans ce cas, les actions (les réactions aux appuis et ou les moments) peuvent être calculées en utilisant tout simplement les équations d'équilibre. Par conséquent, les sollicitations internes, telles que : le moment de flexion, l'effort tranchant et l'effort normal peuvent être déduits en utilisant l'équilibre interne des sections.

Au contraire, les structures hyperstatiques sont aux quelles les équations de la statique ne suffisent pas à la détermination des réactions d'appui et les actions internes. Cela veut dire que le nombre des inconnues (les réactions d'appui) est strictement supérieur au nombre d'équations d'équilibre. La différence entre le nombre des inconnues du problème et celui des équations d'équilibre est appelée le degré d'hyperstaticité du système ou de la structure.

Cet ouvrage est particulièrement consacré à l'analyse des structures hyperstatiques. Il illustre plusieurs méthodes d'analyse des systèmes hyperstatiques. Chaque méthode de calcul est présentée en détail et accompagnée de plusieurs exemples numériques.

1.2 Définition d'une structure

Le mot « structure » désigne dans le domaine de la scène mécanique tout corps solide répondant aux conditions suivantes :

1-La structure est caractérisée par les **propriétés mécaniques** de la matière qui la constitue.

2-Le corps formant cette structure est défini par une **géométrie** quelconque.

3-La structure est liée au **milieu extérieur** par l'intermédiaire des appuis.

4-Elle est soumise à un **chargement externe** quelconque.

La définition d'une structure est clairement projetée sur la figure (Fig. 1.1).

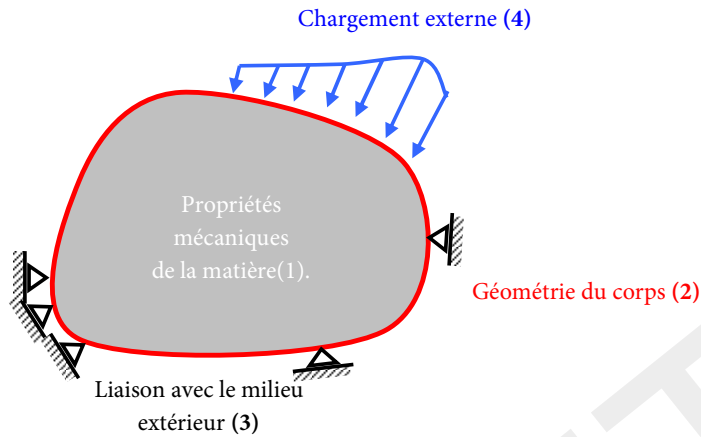


Fig. 1.1 Les conditions d'une structure

1.3 Analyse des structures

L'analyse des structures est l'étude et la détermination de leur réponse lorsqu'elles sont soumises à un ensemble de sollicitations ou de charges externes. En général, la réponse d'une structure est caractérisée par l'évaluation des actions internes et ou les déformations en tout point de la structure. Pour arriver à ce but, il est nécessaire d'utiliser une méthode mathématique, un essai expérimental ou un modèle analytique ou numérique.

Le rôle principal de l'analyse des structures est l'étude de la performance d'une structure soumise à l'effet du milieu extérieur, tels que : un ensemble d'actions externes, un mouvement d'appui ou de support, un changement de température,... etc. Les caractéristiques communes de la performance structurale ayant un intérêt principal dans la conception structurale, sont :

1-Les efforts internes, tels que : l'effort axial, l'effort tranchant, le moment de flexion et le moment de torsion.

2-Les réactions d'appui.

3-Les déformations qui se produisent lors de l'application des sollicitations externes.

Les méthodes classiques d'analyse des structures présentent des limitations de calcul. Cette limitation dépend de la géométrie de la

structure ou du chargement y appliqué (problèmes spéciaux). Cependant, les développements des machines de calcul ont conduit à une énorme évolution de méthodes d'analyse et surtout de type matricielles.

La finalité des deux catégories de méthodes de calcul est d'arriver à une conception structurale répondant simultanément aux critères de résistance et d'économie.

1.4 Historique de l'analyse des structures

La conception et l'analyse des structures sont un art très ancien auquel plusieurs civilisations ont contribué à son développement. Par exemple, les pyramides égyptiennes ont été construites par les Egyptiens vers 2000 B.C. qui représentent une civilisation de l'état actuel.

Les premières constructions ont été réalisées en se basant sur les expériences et les règles empiriques constituant les bases de l'analyse des structures. Dans ce sujet, on distingue les premiers principes de la statique qui furent apparaître vers 300-400 B.C. Les romains ont continué au développement de l'analyse des structures en utilisant cette fois-ci la maçonnerie en pierre jusqu'à 500 B.C. et développé de nouvelles formes de construction en arcs et en voûtes.

Pendant les moyens âges (500-1500), les grecques et les romains ont développé le domaine par la construction des cathédrales. Pendant la période de renaissance, Leonardo Da Vinci (1452-1519) a formulé les premières théories des structures. Cependant, Galileo (1564-1642) a développé la théorie de la mécanique des matériaux en étudiant la rupture des poutres cantilevées. Ensuite, Hooke (1635-1703) a établi la première loi de comportement élastique des matériaux. Johann Bernoulli (1667-1748) a formulé le principe des déplacements virtuels. Daniel Bernoulli (1700-1782) a étudié les courbes élastiques et l'énergie de déformation de flexion. Navier (1785-1836) a initié l'analyse des structures hyperstatiques et ensuite Coulomb (1736-1806) a publié son ouvrage de résistance des matériaux basé sur l'analyse des poutres fléchies.

La période noble qu'a connue l'analyse des structures, est celle de 1800-1900. Pendant cette durée, les bases théoriques de la mécanique des matériaux et des structures ont été développées. On peut distinguer les développements suivants :

1-Les principes de l'analyse des systèmes réticulés isostatiques, Whipple (1804-1888).

2-L'équation des trois moments, Clapeyron (1799-1864).

3-La théorie de la réciprocité des déplacements, Maxwell (1831-1879).

4-L'étude des lignes d'influence, Mohr (1835-1918)

5-Théorème de Castigliano (1847-1884).

6-La méthode des rotations, Maney (1888-1947).

7-Méthode de distribution de moments, Cross (1885-1959).

8-Méthode de relaxation, Southwell (1888-1970).

Plusieurs analystes ont participé par la suite au développement des méthodes d'analyse matricielles et modernes. En plus, le 19^e siècle a connu le développement des nouveaux matériaux, des nouvelles techniques et des structures à formes complexes.

Enfin, les dernières décennies, de considérables développements dans le domaine de la mécanique numérique ont été entrepris après la révolution connue dans le domaine de l'informatique et des méthodes numériques.

1.5 Classification des structures

Le choix de la nature de structure à utiliser dépend de plusieurs facteurs, tels que : le caractère de fonctionnement, les conditions fondamentales, la condition d'économie, l'esthétique et la disponibilité du matériau de construction... etc. Le système de chargement joue un rôle principal dans la sélection de la nature de structure.

Les structures utilisées en génie civil peuvent être classées en 6 catégories en se basant sur la dimension structurale et de la loi de répartition des contraintes dans les éléments de structure sous les charges appliquées. Sur cette base, les structures sont classées en :

1.5.1 Structures réticulées planes

Les structures réticulées planes sont des systèmes composés de barres liés entre eux au niveau des nœuds articulés. Les barres d'une structure réticulée sont uniquement soumises à des tractions ou à des compressions. Lorsque les éléments d'une structure réticulée et le chargement appliqué

sont rapportés à un seul plan, la structure réticulée est appelée plane (Fig. 1.2).

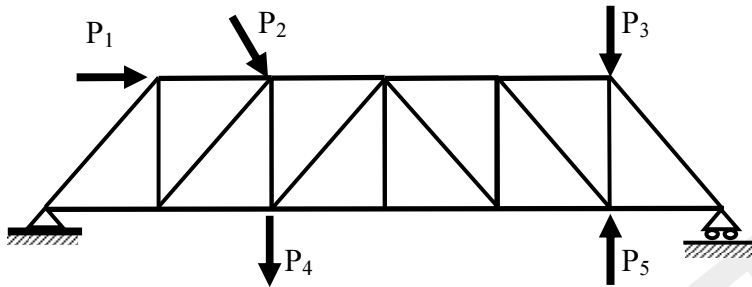


Fig. 1.2 Structure réticulée

Dans ce type de structures, uniquement les charges nodales peuvent être considérées.

Pour le même rôle, on peut distinguer les structures-câbles qui sont soumis à des tractions pures. Cette catégorie est utilisée dans la construction des ponts ou dans les planchers des structures spéciales (Fig. 1.3).

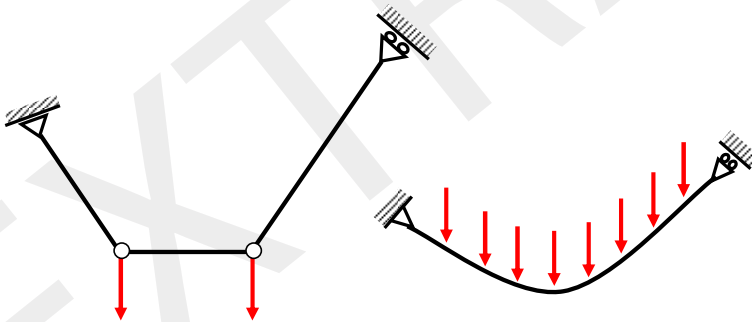


Fig. 1.3 Les structures membranaires.

En général, l'analyse de plusieurs structures réticulées ne peut être établie par une considération planaire suite à la grandeur de la structure ou due à un système de chargement appliqué. Dans ce cas, la structure réticulée peut être étudiée comme une structure tridimensionnelle et le chargement correspondant se répartit aussi suivant les trois dimensions géométriques de la structure. Pareil aux systèmes plans, les forces nodales engendrent que des efforts normaux dans les barres d'une structure réticulée (Fig. 1.4).

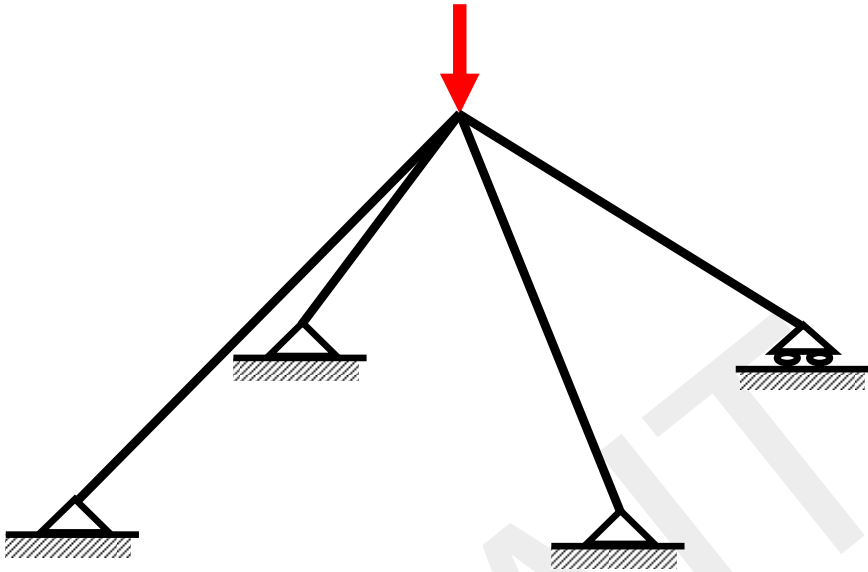


Fig. 1.4 Structure réticulée spatiale

1.5.2 Structures poutres

Une poutre est définie comme étant un élément structural rectiligne. En général, elle est sollicitée par des charges appliquées qui sont rapportées au même plan géométrique. Dans le cas des poutres, les charges appliquées engendrent une dominance de flexion et de cisaillement. L'effort normal est en général négligé (Fig. 1.5).

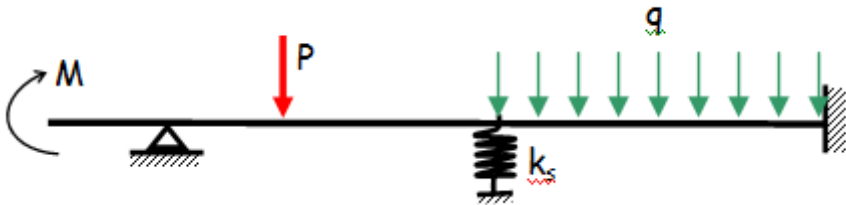


Fig. 1.5 Structure de poutre continue

Dans la plupart des cas, les poutres sont destinées à reprendre les actions de type flexion. D'une façon générale, toute section de la poutre est soumise à un moment de flexion et un effort tangentiel (Fig. 1.6).

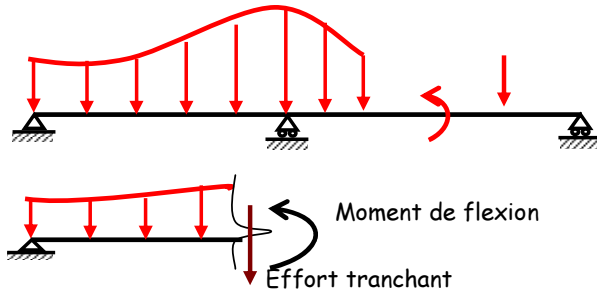


Fig. 1.6 Les structures-poutres

1.5.3 Structures portiques

Les portiques sont composés de plusieurs éléments rectilignes ou obliques liés entre eux par des nœuds rigides. Dans ce cas, les charges peuvent être appliquées aux nœuds et sur les travées. Dans les portiques plans, les éléments et les charges sont liés à un seul plan. Les éléments structuraux sont en général sollicités par une flexion, un effort de cisaillement et un effort normal dus au système de chargement externe (Fig. 1.7).

Les portiques spatiaux sont les plus utilisés dans les ouvrages de génie civil. Le système de chargement est appliqué sur les travées suivant les dimensions structurales et aux nœuds. Les sollicitations représentent le cas général, il s'agit de la flexion, le cisaillement, l'effort normal et la torsion (Fig. 1.8).

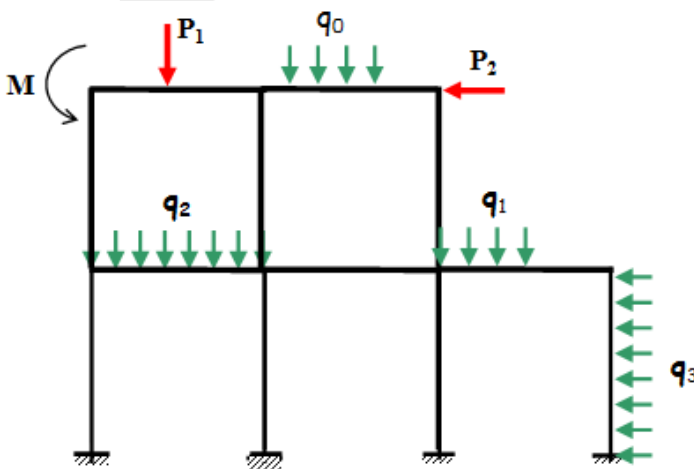


Fig. 1.7 Structure portique

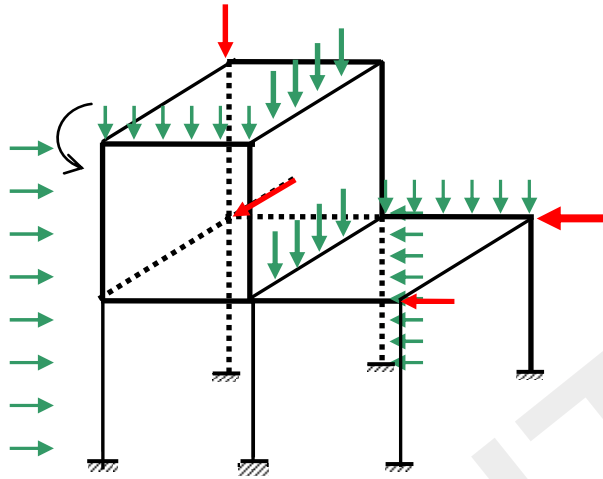


Fig. 1.8 Structure de portique tridimensionnel

1.5.4 Structures en poutres croisées

Les poutres croisées sont constituées par une nappe d'éléments rectilignes disposés dans le même plan constituant un chaînage de poutres. Le système de chargement est appliqué dans le plan perpendiculaire au plan structural. Les sollicitations internes pouvant être envisagées dans une structure en poutres-croisées sont la flexion, le cisaillement, la force normale et la torsion. Les structures de poutres-croisées sont destinées pour reprendre les charges des dalles, des salles de sports, des auditoriums... etc (Fig. 1.9).

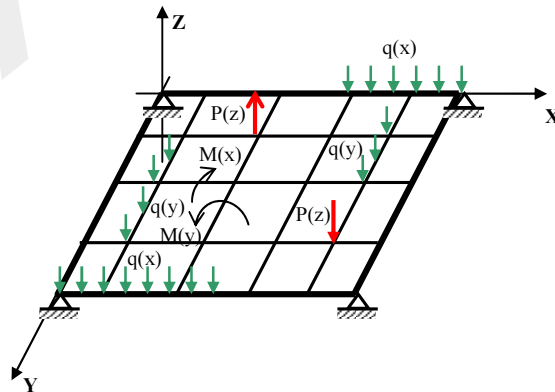


Fig. 1.9 Structure de poutres croisées

1.5.5 Les structures en arcs

Les arcs sont des structures qui ont une courbure renversée par rapport aux structures câbles (Fig. 1.10). Les arcs sont destinés pour reprendre les charges de poutres longues. Ils doivent être assez rigides pour maintenir leurs formes. Le chargement appliqué engendre un effort tranchant et un moment de flexion qui doivent être considérés pendant la phase de conception. Les arcs sont en général utilisés dans les ponts, pour ouvertures dans les murs en maçonnerie, avec ouvertures,... etc.

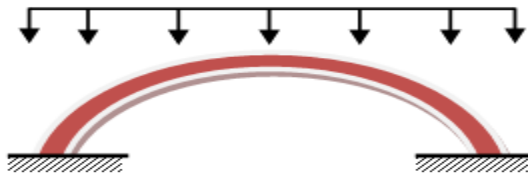


Fig. 1.10 Structure en arc

1.6 Les charges

L'évaluation des charges extérieures joue un rôle très important dans la conception des structures. L'évaluation avec soin des charges extérieures conduit enfin à une exactitude des résultats de toute analyse.

Les charges exerçant une structure peuvent être regroupées en trois groupes : (1) les charges permanentes, (2) les charges d'exploitation et (3) les charges environnementales. Le traitement des différentes charges s'effectue de la même manière en analyse des structures. Lorsqu'un ensemble d'actions agit sur une structure, le principe de superposition peut être utilisé pour faciliter la considération des différents effets d'actions.

1.6.1 Les charges permanentes

Les charges permanentes sont des actions qui ne dépendent pas du temps et de la position. Elles regroupent le poids propre de la structure elle-même ou d'autres actions ayant une intensité constante et une position fixe, telles que : le poids propre des éléments de structure (poteaux, poutres, éléments secondaires, planchers,... etc.), des actions permanentes et les poids des équipements fixes.

L'action des charges permanentes sur la structure peut être suivant une seule dimension (les actions concentrées, les répartitions linéiques), ou suivant deux dimensions (charges sur les dalles, pression hydrostatique sur une paroi) ou tridimensionnel (charges gravitationnelles pour les structures massives).

1.6.2 Les charges d'exploitation

Les charges d'exploitation sont des actions variables en temps et en position. D'une autre façon, les charges d'exploitation sont qui ne sont pas citées comme charges permanentes. Elles sont dues au poids des objets temporairement mis en place sur la structure, telles que : les surcharges des dalles, le poids d'un véhicule sur un pont,... etc.

L'évaluation des actions d'exploitation est donnée par les codes de calcul et basée sur l'importance de la structure et de l'intensité des charges.

1.6.3 Les charges environnementales

Il y a plusieurs types de charges environnementales pouvant solliciter une structure. Parmi ces charges, on peut citer :

- Les actions dues au vent.
- Les actions dues à la neige.
- Les actions dues au séisme
- ets.

L'évaluation de la charge environnementale dépend de la zone ou de la région contenant cette structure. Plusieurs paramètres ayant une influence sur la grandeur de la charge d'environnement doivent être pris en considération (les règles parasismiques, les règles neige et vent,... etc.).

1.7 L'hyperstaticité des structures

Les structures sont en général regroupées en deux grandes catégories : (1) les structures isostatiques et (2) les structures hyperstatiques. Les structures isostatiques sont celles pour lesquelles les équations de la statique sont suffisantes et permettent à leur analyse. Dans ce cas, il est possible de déterminer les réactions d'appui et éventuellement les actions internes, telles que : le moment de flexion, l'effort tranchant et l'effort normal.

Dans le cas contraire, lorsque les équations d'équilibre ne sont pas suffisantes pour déterminer les réactions d'appui, dans ce cas, la structure est appelée une structure hyperstatique. Cela veut dire que le nombre des inconnues est supérieur à celui d'équations indépendantes.

Toute structure est en équilibre sous les charges appliquées lorsque la résultante des forces et la somme des moments suivant une direction sont nulles. Dans le cas des structures bi-dimensionnelles, les trois équations de la statique doivent être remplies, à savoir :

$$\sum F_x = 0 \quad (1.1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (1.2)$$

$$\sum M_i = 0 \quad (1.3)$$

Donc, la structure est dite isostatique si les équations (1.1), (1.2), (1.3) sont suffisantes pour déterminer les actions internes, dans le cas contraire, elle est appelée hyperstatique. Dans cette dernière catégorie de structures et pour déterminer les actions internes, il est nécessaire d'ajouter d'autres équations indépendantes de façon que le nombre des inconnues soit égal au nombre d'hyperstaticité du problème. On définit donc le degré d'hyperstaticité d'une structure par la différence entre le nombre d'inconnue et le nombre des équations de la statique. Dans la section suivante, on calcule le degré d'hyperstaticité en fonction du système de structure utilisé.

1.7.1 Les systèmes réticulés

Dans le cas des systèmes réticulés, la nature d'appui utilisé montre les réactions d'appui correspondantes. Cependant, en mécanique des structures, il y a l'appui double pouvant présenter deux réactions (une réaction verticale et une autre horizontale) et l'appui simple fait apparaître une seule réaction verticale (Fig. 1.11).



Fig. 1.11 Types d'appui et réactions associées

D'où, pour une structure réticulée ayant b barres, n nœuds et possède r réactions d'appui et pour déterminer le degré d'hyperstaticité de la structure, on distingue les cas suivants :

La structure est extérieurement isostatique si :

$$b - (2n - 3) = 0 \quad (1.4)$$

Elle est hyperstatique possédant f fois hyperstatique si :

$$f = b - (2n - 3) > 0 \quad (1.5)$$

Et elle est instable lorsque :

$$f = b - (2n - 3) < 0 \quad (1.6)$$

Avec : f est le degré d'hyperstaticité du système.

Exemple 1.1 :

Analyser l'hyperstaticité des structures réticulées (Fig. 1.12).

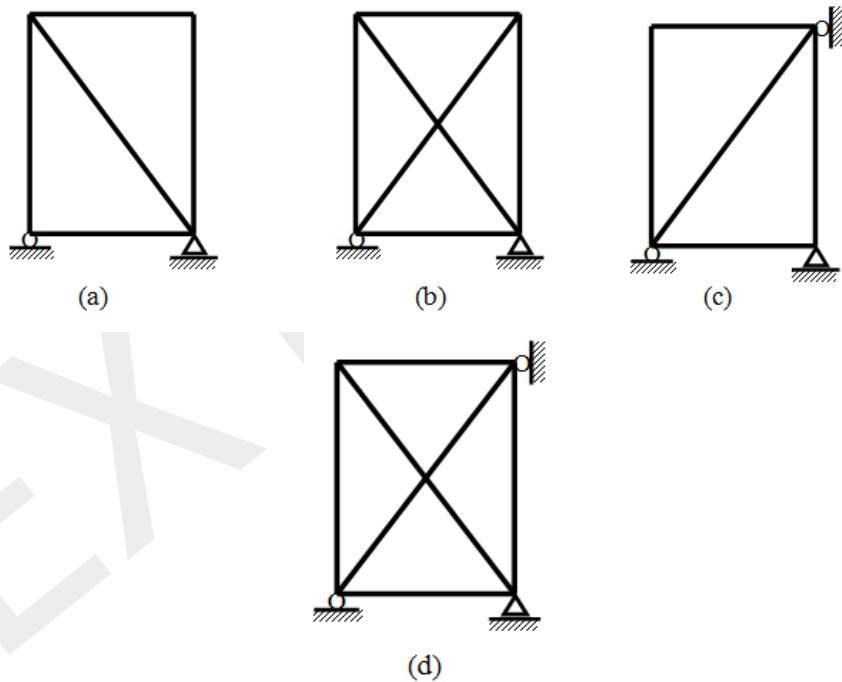


Fig. 1.12 Différentes structures réticulées

Système	(a)	(b)	(c)	(d)
b	5	6	5	6
$2n-3$	5	5	5	5
r	3	3	4	4
f	0	1	0	1

Système	Analyse interne	Analyse externe
(a)	Isostatique	Isostatique
(b)	Une fois hyperstatique	Isostatique
(c)	Isostatique	Une fois hyperstatique
(d)	Une fois hyperstatique	Une fois hyperstatique

Exemple 1.2 :

Analyser l'hyperstaticité des structures réticulées (Fig. 1.13).

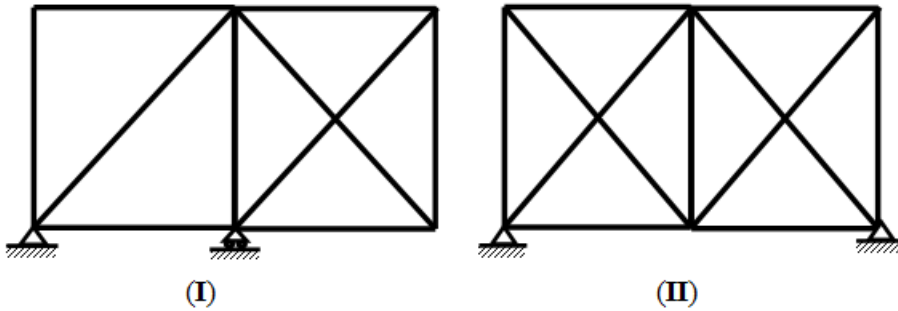


Fig. 1.13 : Structures réticulées

Le système (I) :

$$b = 10$$

$$2n - 3 = 9$$

$$r = 3$$

Donc, le système est extérieurement isostatique et une fois intérieurement hyperstatique.

Le système (II) :

$$b = 11$$

$$2n - 3 = 9$$

$$r = 4$$

Donc, le système est une fois extérieurement hyperstatique et deux fois intérieurement hyperstatique.

1.7.2 Les systèmes poutres et portiques

En plus des appuis simples et doubles, les poutres et les portiques peuvent contenir des encastremements caractérisés par trois réactions